# Bivokscellens geometri

Odd Arild Olsen

Desember 2015

Sammendrag

Bienes vokstavler, og i særdeleshet cellenes oppbygning, har interessert naturforskere fra antikken. I moderne tid oppfordret Kepler andre matematikere til å beskrive cellene matematisk, og flere kjente matematikere har arbeidet med dette. Darwin studerte også nøye hvordan biene bygde cellene. Denne artikkelen prøver å forklare hvordan cellestrukturen kan oppfattes som en optimalisering av lagringsvolum med lavest mulig voksforbruk.

Biene produserer voks for å lage celletavler med celler for yngel og honning. Det koster biene mye energi å produsere voks. Derfor er det fornuftig å bygge voksceller som har størst mulig lagringsvolum i forhold til voksvolum. Celleveggene har omtrent samme tykkelse over alt og voksvolumet er derfor proporsjonalt med veggenes areal. Optimale celler har derfor lavest mulig forhold mellom veggareal og volum. Cellene består av både vegger og bunn. Først skal vi se bort fra voksen som går med til bunnen og bare se på forholdet mellom veggareal og volum.

## Cellenes grunnflate

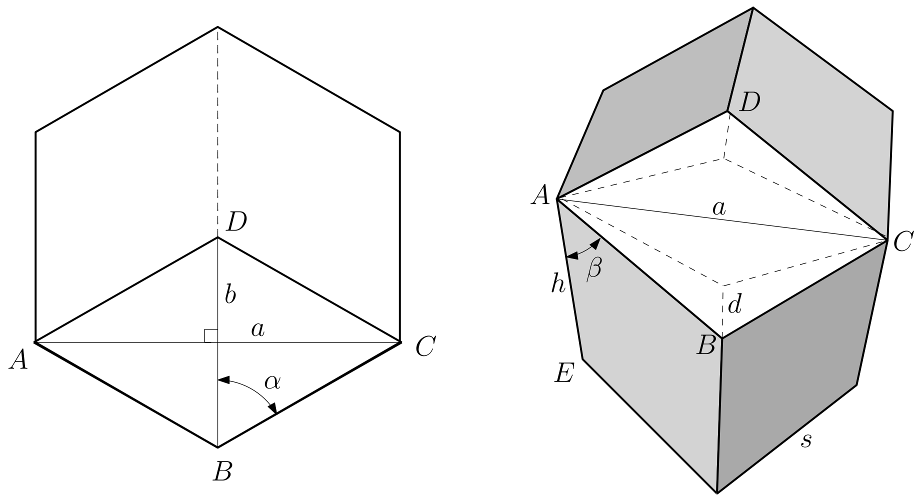
Cellevolumet er grunnflaten ganget med høyden og veggoverflaten er grunnflatens omkrets ganget med høyden. Høyden er den samme i begge tilfellene. Forholdet mellom volum og overflate er derfor proporsjonalt med grunnflaten dividert med omkretsen.

For en sirkulær grunnflate er forholdet $\pi r^2/2\pi r = r/2$. Setter vi radien $r = 1$ blir forholdet $0{,}5$. Sylinderen har det størst mulige forholdet og er mest effektiv, men når sylindrene pakkes sammen blir det mellomrom mellom dem som ikke brukes.

Trekanter kan derimot pakkes uten mellomrom. For likesidede trekanter med sidekant 1, er arealet $\sqrt{3}/4 = 0{,}43$ og omkretsen 3. Forholdet mellom areal og omkrets er nå $0{,}43/3 = 0{,}14$.

Rektangler kan også pakkes uten mellomrom. For et kvadrat med like sidekanter 1 blir aralet 1 og omkretsen 4, så forholdet er $0{,}25$.

Sekskanten er den siste som kan pakkes uten mellomrom. Arealet av en likesidet sekskant med side 1 er $3\sqrt{3}/2 = 2{,}60$ og omkretsen 6. Forholdet er $2{,}60/6 = 0{,}43$.




Figur 1: Venstre: grunnflaten i en likesidet sekskant kan deles opp i tre like romber. Høyre: likesidet sekskantet prisme med rombebunn. Stiplet linje viser kanten når bunnen er flat.

Vi ser at forholdet øker jo mer figuren ligner en sirkel. Sekskanten er den formen som ligner mest på en sirkel og som kan pakkes sammen av like store celler uten mellomrom. Derfor er det naturlig at cellenes bygges som sekskantede prismer.

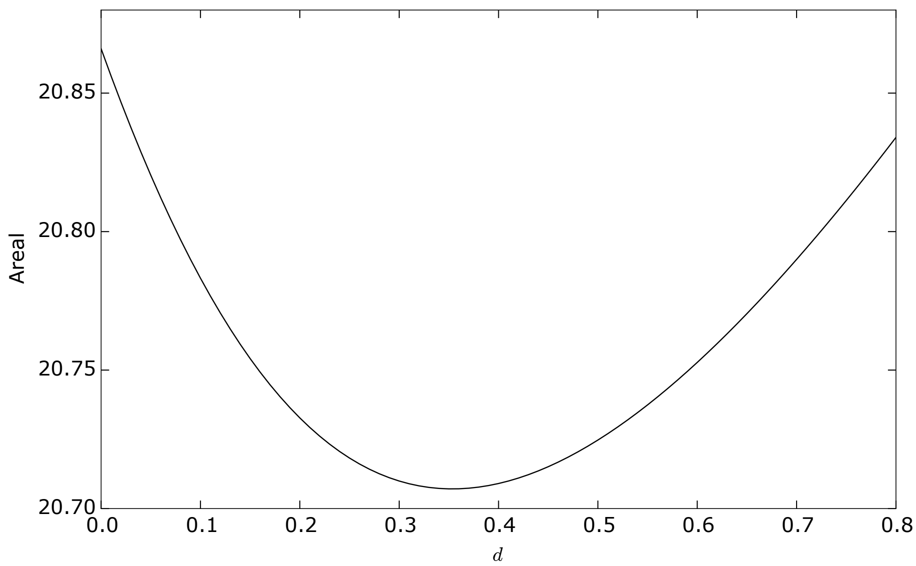
(Forslag til leseraktivitet: Vi har regnet ut forholdet for kvadrater og likesidede trekanter. Hva blir forholdet for rektangler og ulikesidede trekanter?)

## Bunn

Cellebunnen kan være flat eller pyramideformet. Pyramiden kan ha sekskantet grunnflate med seks trekanter som sider. Den kan også ha trekantet grunnflate og ha sideflater av tre romber. Biene har valgt å bruke romber, se venstre del av figuren. Dette er den nest mest optimale formen som er kjent, det finnes en litt mer komplisert form som gir marginalt mer volum/overflate. Rombens diagonaler står vinkelrett på hverandre og sidene er like lange.

Høyre side i figuren viser en vokscelle sett fra bunnsiden. Den ene bunnromben $ABCD$ har $D$ i cellas akse og $B$ et sted langs sidekanten. Sekskantens sider har lengde $s$. Vi kan nå tenke oss at rombediagonalen $BD$ ($b$) strekkes slik at $D$ flyttes oppover aksen og $B$ nedover sidekanten. Avstanden $AC$ ($a$) er konstant. Det betyr at vi vipper romben om diagonalen $a$. Hjørnet $B$ havner avstanden $d$ nedenfor der hjørnet var da bunnen var flat og $D$ løftes tilsvarende oppover langs aksen.

Cella kan deles opp i tre symmetriske deler. For enkelhets skyld ser vi bare på en av dem her. Romben er også symmetrisk om $a$. Når bunnen er flat, blir volumet av det trekantede prismet under $ABC$ lik det under $ACD$. Når romben vippes, øker volumet under $ADC$ like mye som det minker under $ABC$. Volumet er derfor det samme selv om romben vippes.




Figur 2: Cellevolumet som funksjon av hvor mye romben vippes.

I det følgende antas volum og cellehøyde $h$ konstant.

## Hele cella

Med konstant volum, er forholdet mellom volum og overflate maksimalt når overflaten er minimal. Når bunnen ligger flatt, og vippes litt, endres ikke rombearealt seg mye, men det gjør sidearealet. Når romben er vippet mye, øker rombearealet vesentlig uten at sidearealet avtar like mye. Så et sted mellom finnes minimalt areal.

Overflaten av tredelen av cella er summen av to trapesformede sider og en rombe. Overflaten av to sideflater er

$$A_s = 2(h + h - d)s/2 = 2hs - ds$$

og av romben

$$A_r = a \cdot b/2$$

For romben er $a = \sqrt{3}s$, og når romben ligger flatt er $b = s$. Når romben vippes øker $b/2$ til $b'/2 = \sqrt{d^2 + (s/2)^2}$. Rombens areal er da:

$$A_r = ab'/2 = s\sqrt{3}\sqrt{d^2 + (s/2)^2}$$

Vi må finne miniumum av uttrykket for det samlede arealet

$$A = 2hs - ds + s\sqrt{3}\sqrt{d^2 + s^2/4}$$

Her er $h$ og $s$ konstante og $d$ den ukjente variabelen.

Figur 2 viser overflatearealet av en celle med sidekant 1 og høyde 10. Minimalt areal opptren når $d \approx 0{,}35$. I dette tilfellet er høydene for $A$ og $C$ 10, $B$ $10 - 0{,}35 = 9{,}65$ og $D$ $10 + 0{,}35 = 10{,}35$.

Det eksakte minimumspunktet finnes ved å derivere ligningen over og sette lik null

$$\frac{dA}{dd} = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,2d(d^2 + s^2/4)^{-1/2} = 0 \rightarrow \sqrt{3}\,d = -\sqrt{d^2 + s^2/4} \rightarrow d^2 = \frac{s^2}{8}$$

Det gir det interessante resultatet $d = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

Vi kan også regne ut rombens vinkel $\alpha$:

$$\text{arctan}\,\alpha = \frac{a/2}{b'/2} = \frac{a}{b'} = \frac{\sqrt{3}s}{2\sqrt{3s^2/8}} = \frac{1}{2\sqrt{8}} = \sqrt{2}$$

Utregnet er vinkelen 54,74°. De fire vinklene i romben er da $2 \cdot 54{,}74° = 109{,}47°$ og $(360 - 2 \cdot 109{,}47)/2 = 70{,}53°$. Legg merke til at forholdet mellom rombens diagonaler er det vakre tallet $\sqrt{2}$.

Nå kan vi også regne ut sideflatens vinkel $\beta = \angle EAB$

$$\text{arctan}\,\beta = \frac{s}{d} = \frac{s}{s/\sqrt{8}} = 2\sqrt{2}$$

Det tilsvarer igjen en vinkel på 70,53°.

# Konklusjon

Mange forskere har i tidligere århundrer målt bunnvinkler i vokskaker for å påvise at biene følger denne oppskriften for å optimalisere tavlene. Måleresultatene er urealistisk nøyaktige og stemmer for godt med teorien til å være troverdige. Sannsynligvis kjente de det rette svaret på forhånd og bare verifiserte at vinkler kunne virke fornuftige i forhold til teorien. Og vi vet jo at biene ikke bygger så presist som vi tror, selv når de får byggevoks med anvisning. Men vokscellene er et eksempel på mønstre som går igjen mange steder i naturen og som kan ha en flott matematisk beskrivelse. Så i det minste kan denne betraktningen være motiverende for matematikk(u)interesserte.

## Referanser

Stoffet er basert på en rekke mer eller mindre hjelpsomme drypp fra nettet, både ferskt og gammelt stoff. For eksempel R. M. Dimitrić, 1998: Using less calculus in teaching calculus; an historical approach.